Ранг матрицы( rang A)

Минором(Mk) k-того порядка называется определитель, получившийся путем вычеркиванием в данной матрице k строк и k столбцов (В элементы входящие в перечеркнутые строки и столбцы)

Определение ранга матрицы.

Число r>0 называется рангом матрицы(в которой есть хотя бы один элемент отличный от нуля), если в этой матрице содержатся хотя бы один минор порядка r(отличный от нуля), а все миноры порядка r+1(и более, если таковые имеются) равны 0

матрица А

(2 -1 3 1)

(-1 3 1 4)

(3 1 7 6)

🡺

(|2 -1 | 3 1)

(|-1 3 | 1 4)

-----

(3 1 7 6)

M1 =

|2 -1 3|

|-1 3 1|

|3 1 7| =

1&&&

Все миноры третьего порядка равны нулю, значит ранг матрицы остается равным 2: rang A = 2

Это метод окайммления миноров или метод окаймляющих миноров

(a11, a12, … a1n)

(a21, a22, … a2n)

( … )

(an1, an2, … ann)

= A

\_a2 = (a21, a22, … a2n)

\_ak = (ak1, ak2, … akn)

Вектор столбец

2&&&

Система строк(векторов) называется линейно зависимой либо линейно независимой, если их линейная комбинация(alpha1\*\_a1 + alpha2\*\_a2 + … + alphak\*\_ak) равна нулю только в том случае, когда все коэффициенты alpha1, alpha2, … alphak равны нулю. В противном случае система называется линейно зависимой

Другое определение линейной зависимости: Система строк(столбцов) называется линейно зависимой, если в равной нулю их линейной комбинации хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Следствия: Если в некоторой системе часть векторов линейно зависима, то их вся система линейна зависима. Действительно: Пусть в системе \_а1, \_а2, \_а3, … \_аn часть векторов, например \_а1, \_а2, \_а3, … \_аk (k<n) линейно зависима. Тогда, по определению линейно зависимости alpha1\*\_a1 + alpha2\*\_a2 + … + alphak\*\_ak = 0, причем по крайне мере хотя бы один из коэффициентов, например alpha1 != 0, тогда рассмотрим линейную комбинацию всей системы alpha1\*\_a1 + alpha2\*\_a2 + … + alphak\*\_a2 + 0\*\_a(k+1) + 0\*\_a(k+2) + … + 0\*\_an = 0. По определению вся система линейно зависима.

2) система линейно зависима тогда и только тогда когда хотя бы один из векторов равен линейной комбинации из остальных векторов

Необходимость и достаточность

1. Необходимость: Дано:

Система линейно зависима

Тогда, хотя бы один коэффициент линейной комбинации равной нулю отличен от нуля.

Например alpha1 != 0. Разделим всю комбинацию на alpha1 u \_a1, перенесем в другую сторону

\_a1 = -alpha2/alpha1 \* \_a2 – alpha3/alpha1 \* \_a3 - … - alphan/alpha1 \* \_an ч.т.

1. достаточность Gthtytctv dct d lheue. Cnjhjye^

????????????????????????????????????

3&&&

Второй способ вычисления ранга матрицы(с помощью элементарных преобразований)

Переводим матрицу к трапецевидной форме(диагональной)

4&&&

Третий способ:

Найти максимальное число линейно независимых строк, это и будет ранг матрицы

Теорема о базисном миноре.

Пусть ранг матрицы А равен r > 1. Тогда, без ограничения общности, будем считать что минор порядка r отличный от нуля( называется базисным минором) находится в левом верхнем углу)

5&&&

Теорема: Все базисные строк линейно независимы. Любая строка есть линейная комбинация базисных строк

1. докажем, что все базисные строки линейно независимы. Если бы это было не так, то одна из базисных строк была бы линейной комбинацией остальных базисных строк. Вычтем эту линейную комбинацию из указанной строки, получим нулевую строку состоящую из одних нулей => базисный минор = 0, что противоречит его определению.
2. Докажем, что любая строка матрицы есть линейная комбинация базисных строк. Это очевидно если взять базисную строку. Возьмем теперь не базисную строку с номером k > r, переместив ее непосредственно под базисный минор, далее берем произвольный столбец с номером j и передвигаем его, помещая справа от базисного минора. Получился минор порядка r+1, он равен 0 по определению ранга. С другой стороны вычислим этот минор порядка r+ 1 разложением по элементам j-того столбца(стоит справа).

Алгебраическое дополнение

Delta(r+1) = a1j A1j + a2j A2j + … + akj Akj

Delta r = 0

6&&&

Теорема: Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда когда его строки линейно зависимы.

Док-во:

1. Необходимость:

Пусть det A = 0, значит rang A < n. Значит хотя бы одна строка не попала в базисный минор, но по теореме о базисе миноре любая строка есть линейная комбинация базисных, а это и значит что строчки определителя линейно зависимы.

1. Достаточность:

Пусть строки линейно зависимы. Тогда одна строка есть линейная комбинация остальных. Вычтем из этой строки указанную линейную комбинацию. Получим нулевую строку. Отсюда и следует что det A = 0, что и требовалось доказать.

Системы линейных алгебраических уравнений(СЛАУ)

Рассмотрим, в частности квадратные системы:

A11 x1 + a12 x2 + … + a1n xn = b1

A21 x1 + a22 x2 + … + a2n xn = b2

…

An1 x1 + an2 x2 + … + ann xn = bn

Теорема крамера:

Система (\*) имеет и и притом единственное решение, если det A != 0,

7&&&

X1 = delta1/delta; x2 = delta2/delta; … xn = deltan/delta

Где deltai получается из delta заменой i-того